Vertrouwt u uw rekenmachine ?

Johan Vervloet

6 december 2000

To err is human, but to really foul things up requires a computer. Farmer's Almanac, 1978

- 25 februari 1991, volle golfoorlog. Een Irakese Scudraket ontwijkt het Patriot antiraketsysteem, en doodt 28 soldaten. Rekenfoutje van de computer...[1]
- 4 juni 1996, lancering van de eerste Ariane 5 raket. Na 36 seconden wijkt ze af van de geplande baan, waarna ze explodeert. Rekenfoutje van de computer...[2]
- 30 november 2000. Een populair wiskundig computerprogramma tekent tweemaal een grafiek van dezelfde kromme. Beide grafieken verschillen aanzienlijk (zie figuur 1). Rekenfoutje van de computer...[3]

Er wordt vandaag de dag behoorlijk wat afgerekend door computers. Een bekend probleem in deze context is dat mensen meestal rekenen met een oneindig aantal reële getallen, maar dat een computer slechts een beperkt aantal van deze getallen van elkaar kan onderscheiden. Wanneer je een getal nodig hebt dat hij niet 'kent', zal de computer dit afronden naar een getal in de buurt, waarvoor hij wel een voorstelling heeft. Het zijn echter deze kleine afrondingen die dikwijls grote gevolgen hebben, zoals bovenstaande voorbeelden duidelijk aantonen.

Toch is het verwonderlijk dat dergelijke incidenten zich ook vandaag nog voordoen. Sinds de jaren zestig bestaat er immers een eenvoudige techniek die aangeeft hoe betrouwbaar een door de computer berekend resultaat is : het zogenaamde 'intervalrekenen'.

Intervallen. Niet meer – niet minder

De techniek van het intervalrekenen zal voor zijn tussenresultaten in een berekening niet één afgerond getal gebruiken, maar twee getallen : een onder-

[1] `http://www.math.psu.edu/cao/disasters.html`
[2] `http://www.esa.int/htdocs/tidc/Press/Press96/ariane5rep.html`
[3] `http://win-www.uia.ac.be/u/cant/arithmos/publications/lyon/`

grens en een bovengrens van het echte (wiskundige) resultaat. Een dergelijke combinatie ondergrens-bovengrens wordt 'interval' genoemd.

Wanneer je bijvoorbeeld het legendarische getal π als interval wil voorstellen, zou je als ondergrens $3,141$ kunnen nemen, en als bovengrens $3,142$.

Bij het rekenen met intervallen moet je nu twee zaken in de gaten houden. Als je een afronding moet maken bij de berekening van een nieuwe ondergrens, dan rond je af naar beneden. Als je moet afronden bij de berekening van een nieuwe bovengrens, dan rond je af naar boven. Op die manier krijg je na iedere deelbewerking een onder- en bovengrens van het gewenste resultaat.

Aan het einde van de berekening kan je dan nagaan hoe dicht de bekomen grenzen bij elkaar liggen. Liggen ze vlak bijeen, dan is het resultaat betrouwbaar, in het andere geval niet.

Bij wijze van voorbeeld wordt in figuur 2 aan de hand van intervalrekenen verklaard waarom de linkse grafiek van figuur 1 betrouwbaarder is dan de rechtse.

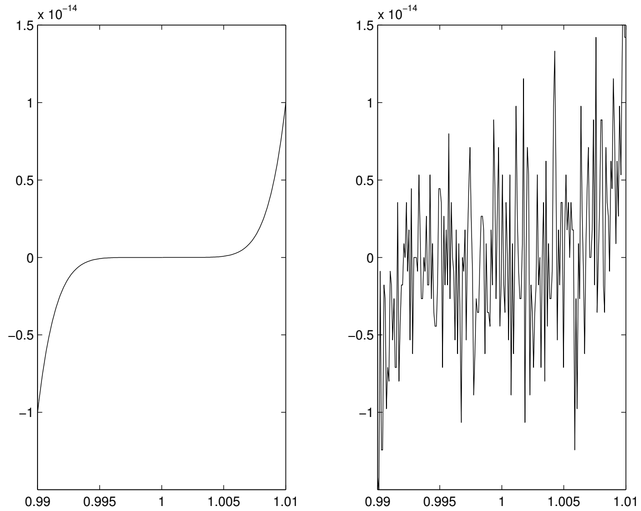
Weg met de calculator ?

Moeten we nu massaal onze rekenmachines weggooien ? Uiteraard niet. Voor 'huis-, tuin- en keukentoepassingen' zijn ze perfect bruikbaar. Maar wanneer het om belangrijke zaken gaat, komt de vraag van de betrouwbaarheid op de proppen.

Intervalrekenen is een eenvoudige manier om onnauwkeurigheden op te sporen. Ze heeft weliswaar dubbel zoveel tijd nodig voor een berekening als het klassieke computerrekenen, maar op sommige momenten moeten nu eemaal prioriteiten gesteld worden. Het zou niet de eerste keer zijn dat een zetel in het parlement verkeerdelijk wordt toegewezen omwille van een afrondingsfout... [4]

[4] `http://catless.ncl.ac.uk/Risks/13.37.html#subj4.1`

We vroegen een wiskundig programma de grafiek te tekenen van de functies $(x-1)^7$ (links) en $x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$ (rechts). Volgens de wiskunde zijn beide functies identiek; toch zijn de getekende grafieken behoorlijk verschillend.



Figuur 1: Twee dezelfde grafieken ?

De computer genereerde de linkergrafiek aan de hand van het functievoorschrift $(x-1)^7$. Wanneer we door middel van intervalrekenen op zoek gaan naar enkele beeldwaarden in de buurt van 1, krijgen we deze resultaten :

x	onder- en bovengrens van $(x-1)^7$
1.002	$[1.280000000000006 \times 10^{-19}; 1.280000000000009 \times 10^{-19}]$
1.004	$[1.638400000000008 \times 10^{-17}; 1.638400000000011 \times 10^{-17}]$
1.006	$[2.799360000000016 \times 10^{-16}; 2.799360000000020 \times 10^{-16}]$

Voor de rechtergrafiek kreeg de computer $x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$ als voorschrift. We bekijken opnieuw enkele beeldwaarden in de buurt van 1.

x	onder- en bovengrens van $x^7 - 7x^6 + \cdots - 1$
1.002	$[-5.684341886080803 \times 10^{-14}; 4.263256414560602 \times 10^{-14}]$
1.004	$[-4.263256414560602 \times 10^{-14}; 5.684341886080802 \times 10^{-14}]$
1.006	$[-4.263256414560602 \times 10^{-14}; 4.263256414560602 \times 10^{-14}]$

In het eerste geval liggen de gegenereerde onder- en bovengrens veel dichter bij elkaar dan in het tweede geval (waar we zelfs geen zekerheid krijgen over het teken van het resultaat). Dit toont aan dat de linkergrafiek een correcter beeld geeft van wat we wilden berekenen dan de rechtergrafiek.

Figuur 2: De verschillende grafieken – het raadsel ontsluierd