Verzamelingensystemen

Johan Vervloet

17 oktober 2000

Samenvatting

Oorspronkelijk moest dit een tekst worden over supervallen, maar uiteindelijk is het veel meer geworden dan dat. In dit artikel zullen we zogenoemde 'verzamelingensystemen' definiëren en bespreken. Voorbeelden van verzamelingensystemen zijn de `specialvalue` klasse [1], Bill Walsters Extended Real Interval System [2] (maar dat weet hij zelf waarschijnlijk niet :)), en tenslotte toch de 'supervallen'. Door op deze laatste wat dieper in te gaan, schieten we ons oorspronkelijk doel in ieder geval niet voorbij.

Inhoudsopgave

1 Vooraf een aantal notaties

Voor de goede gang van zaken geven we eerst een overzichtje van de notaties die we in de rest van de tekst zullen gebruiken.

1. Als $f : X \to Y$ een functie is, en $A \subset X$, dan is

$$f(A) = \{y \in Y | \exists x \in A : f(x) = y\}$$

2. Als X een verzameling is, dan is

$$\mathcal{F}(X) = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^{(X^i)}$$

de verzameling van alle 'X-functies' met een eindig aantal argumenten.

3. Een tweetal speciale notaties voor limieten[1]

$$\begin{array}{rcl} \lim_{x\to\infty} f(x) & \doteqdot & \lim_{|x|\to+\infty} f(x) \\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty & \Longleftrightarrow & \lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty \end{array}$$

4. Verder gebruiken we volgende notaties voor intervallen ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rcl} [a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\ [a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ ]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\ ]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \\ [a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ ]a,\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]\infty,b] & = & \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ ]\infty,b[& = & \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \end{array}$$

5. En tenslotte definiëren we voor een verzameling X

$$\begin{array}{rcl} X_0 & = & X \setminus \{0\} \\ \overline{X} & = & X \cup \{\infty\} \\ X^* & = & X \cup \{+0, -0, +\infty, -\infty\} \\ \widehat{X}(\text{met } X \subset \mathbb{R}) & = & [\inf X, \sup X] \\ \mathbb{I}X(\text{met } X \subset \mathbb{R}) & = & \{[a,b] \mid a,b \in X\} \cup \{[a,b[\mid a,b \in X\} \\ & & \cup\{]a,b] \mid a,b \in X\} \cup \{]a,b[\mid a,b \in X\} \\ & & \cup\{[a,\infty[\mid a \in X\} \cup \{]a,\infty[\mid a \in X\} \\ & & \cup\{]\infty,b] \mid b \in X\} \cup \{]\infty,b[\mid b \in X\} \\ & & \cup\{\emptyset, X\} \end{array}$$

[1] Let op het belangrijke verschil tussen ∞ en $+\infty$!

2 Verzamelingensystemen

2.1 Enkele kleine k$\mathbb{U}$nstgrepen (projectief !)

Opdat alles wat volgt consistent zou zijn, moeten we eerst een aantal kleine kunstgrepen uitvoeren. (Of, iets wetenschappelijker verwoord, zullen we een aantal noodzakelijke precondities in acht moeten nemen.)[2]

Om te beginnen definiëren we de verzameling $\mathbb{U}$, het 'universum'. In deze tekst stellen we

$$\mathbb{U} = \overline{\mathbb{C}} \cup \{\text{nan}\} \tag{1}$$

Vervolgens construeren we voor elke functie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ een nieuwe functie $\tilde{f} \in \mathcal{F}(\mathbb{U})$.

Zij f een n-aire functie uit $\mathcal{F}(\mathbb{C})$, en $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{U}^n$. We definiëren $\tilde{f}$ als volgt :

$$\tilde{f}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} f(\bar{a}) & \text{als} \quad \bar{a} \in \text{dom} f \\ b & \text{als} \quad \bar{a} \notin \text{dom} f \text{ en } \lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(\bar{x}) = b \\ \text{nan} & \qquad\ \ \text{in alle andere gevallen} \end{cases} \tag{2}$$

Per definitie zullen we aannemen dat de uitdrukking $\lim_{\bar{x} \to \bar{a}} f(x)$ ongedefinieerd is als een van de x_i'tjes of a_i'tjes nan is.

De verzameling van alle functies die we op deze wijze kunnen construeren noteren we als

$$\tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{C}) = \{\tilde{f} | f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})\} \tag{3}$$

Wanneer we dit toepassen op de bewerkingen $\tilde{+}, \tilde{-}, \tilde{\times}$, en $\tilde{/}$, komen daar volgende eigenschappen uit[3] $(a \in \mathbb{C}, a_0 \in \mathbb{C}_0^*)$:

$$a + \infty = \infty \tag{4}$$
$$a - \infty = \infty \tag{5}$$
$$a_0 \times \infty = \infty \tag{6}$$
$$\frac{a}{\infty} = 0 \tag{7}$$
$$\frac{a_0}{0} = \infty \tag{8}$$

Volgende uitdrukkingen zullen allemaal als nan geëvalueerd worden :

$$\infty + \infty \qquad \infty - \infty \qquad 0 \times \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad a^{\infty} \tag{9}$$

[2]Deze paragraaf beschrijft iets analoog aan sectie 1.3 van [1]. De versie hier is iets eenvoudiger gedefinieerd, maar daarom zeker niet minder bruikbaar.

[3]Om overladen notatie te vermijden, zullen we vanaf nu de tildes achterwege laten. We gaan er gewoon vanuit dat de functies die we gebruiken elementen zijn van $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{C})$.

2.2 Definitie

Een 'verzamelingensysteem' is een tupel $(\mathcal{X}, \phi, \mathbf{R})$, waarbij $\mathcal{X} \subset 2^{\mathbb{U}}$, $\phi : \tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{C}) \to \mathcal{F}(\mathcal{X})$ en $\mathbf{R} \subset \mathbb{U}$, dat voldoet aan deze voorwaarde :

Als f een n-aire functie is uit $\tilde{\mathcal{F}}(\mathbb{C})$, dan is ook $\phi(f)$ een n-aire functie, en geldt

$$\forall X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{X} : f(X_1, \ldots, X_n) \cap \mathbf{R} \subset \phi(f)(X_1, \ldots, X_n) \tag{10}$$

De functie $\phi(f)$ zullen we ook noteren als $\dot{f}$, analoog aan wat gebeurt in [1].

2.3 Intuïtieve interpretatie van deze definitie

Dat is natuurlijk een hele boterham. Om in deze definitie wat klaarheid te brengen, zullen we ze toepassen op een implementatie van intervalaritmetiek.

De verzameling $\mathcal{X}$ is de verzameling van intervallen die voorstelbaar is door de implementatie. Dit zijn bevoorbeeld de intervallen die als randpunten eindige floating-point getal hebben.

De functie ϕ beeldt elke functie af op z'n implementatie; wanneer we bijvoorbeeld optellen in intervalaritmetiek, zullen we i.p.v. de gewone optelling $+$ de intervalimplementatie $\phi(+)$ gebruiken, die we ook als $\oplus$ zullen noteren.

Uitdrukking (10) is de zogenaamde 'containment' vereiste voor intervalaritmetiek. Hoe streng deze containment is, wordt bepaald door de verzameling $\mathbf{R}$. Als we enkel elke mogelijke reële oplossing in ons resultaatinterval willen, volstaat het om $\mathbf{R} = \mathbb{R}$ te stellen. Als we bijvoorbeeld ook mogelijk oneindige oplossingen in ons resultaatinterval wensen, moet $\mathbf{R}$ minstens $\mathbb{R}^*$ bevatten.

3 Voorbeelden van verzamelingensystemen

3.1 De klasse `specialvalue`[1]

- $\mathcal{X} = \mathbb{S}$
- $\mathbf{R} = \mathbb{U}$

De verzameling $\mathbb{S}$ is de verzameling van alle speciale waarden die ondersteund worden door de klasse `specialvalue` [1]. Ze bevat de volgende elementen :

1. $\emptyset, \mathbb{U}$
2. $\{\infty\}, \{0\}$
3. $\mathbb{Z}_0^+, \mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_0^-, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_0^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}_0, \mathbb{R}_0^-, \mathbb{C}_0$
4. alle mogelijke unies van vorige verzamelingen, met hoogstens één component uit (3).

Een uitgebreide beschrijving van de het verzamelingensysteem $(\mathbb{S}, \phi, \mathbb{U})$ is te vinden in [1].

3.2 Beperkte reële intervallen

- $\mathcal{X} = \mathbb{IR}$
- $\mathbf{R} = \mathbb{R}$

Dit is gewoon een doordeweekse implementatie van intervalaritmetiek. In praktijk zal natuurlijk niet heel $\mathbb{IR}$ voorgesteld kunnen worden, maar zal er met een subset, bijvoorbeeld een verzameling floating-pointintervallen $\mathbb{IF}$, gewerkt worden.

3.3 The Extended Real Interval System[2]

- $\mathcal{X} = \mathbb{IR}^*$
- $\mathbf{R} = \mathbb{R}^*$

Details over het systeem van W. Walster kunnen teruggevonden worden in [2]. We zullen verderop in dit artikel zijn systeem vergelijken met de zogenaamde supervallen (die in volgende subsectie aan bod komen).

3.4 Supervallen

- $\mathcal{X} = \mathbb{SR} \doteqdot \mathbb{IR} \times \mathbb{S}$
- $\mathbf{R} = \mathbb{U}$

Hier zitten wel een aantal addertjes onder het gras. We zullen een superval (X, Y) noteren als $X \sqcup Y$, en in uitdrukking (10) zullen we $X \sqcup Y$ interpreteren als stond er $X \cup Y$. We kunnen deze uitdrukking dan als volgt herformuleren :

Zij f een n-aire functie uit $\mathcal{F}(\mathbb{C})$, en $X_1 \sqcup Y_1, \ldots X_n \sqcup Y_n \in \mathcal{X}$. Er geldt

$$\begin{array}{c} \phi(f)(X_1 \sqcup Y_1, \ldots, X_n \sqcup Y_n) = X \sqcup Y \\ \Downarrow \\ f(X_1 \cup Y_1, \ldots, X_n \cup Y_n) \cap \mathbf{R} \subset X \cup Y \end{array} \tag{11}$$

Bovendien zullen we voor supervallen een extra eis stellen :

$$\begin{array}{c} \phi(f)(X_1 \sqcup Y_1, \ldots, X_n \sqcup Y_n) = X \sqcup Y \\ \Downarrow \\ f(X_1, \ldots, X_n) \cap \mathbb{R} \subset X \end{array} \tag{12}$$

4 Wat meer over supervallen

We zullen in deze sectie wat dieper ingaan op het laatste voorbeeld van verzamelingensystemen : de supervallen. Om te beginnen beschrijven we hier kort hoe we de basisbewerkingen, vierkantswortel en relationele operatoren kunnen implementeren voor supervalaritmetiek. Men kan de juistheid van deze algoritmes gemakkelijk bewijzen door de criteria (11) en (12) te verifiëren. Vervolgens vergelijken we het systeem van de supervallen met de Extended Real Interval Arithmetic van W. Walster.

4.1 Optelling, aftrekking en vermenigvuldiging

Zij $* \in \{+, -, \times\}$, en $X_1 \sqcup Y_1, X_2 \sqcup Y_2 \in \mathbb{SR}$. We definiëren $\circledast \doteqdot \phi(*)$ als volgt :

$$X_1 \sqcup Y_1 \circledast X_2 \sqcup Y_2 = X_1 * X_2 \sqcup \overline{X_1 * Y_2 \cup Y_1 * X_2 \cup Y_1 * Y_2} \tag{13}$$

Merk op dat het rechtse deel in deze uitdrukking $\emptyset$ is als en slechts als ofwel Y_1 ofwel Y_2 leeg is. De notatie $\overline{A}$ staat voor de '$\mathbb{S}$-sluiting' van A, m.a.w. de kleinste verzameling in $\mathbb{S}$ die A omvat.

4.2 Deling

Zij $X_1 \sqcup Y_1, X_2 \sqcup Y_2 \in \mathbb{SR}$. We definiëren $\oslash \doteqdot \phi(/)$ als volgt :

$$\begin{aligned} &X_1 \sqcup Y_1 \oslash X_2 \sqcup Y_2 = \\ &\quad \widehat{X_1/X_2} \cap \mathbb{R} \sqcup \overline{((X_1/X_2) \setminus \mathbb{R}) \cup X_1/Y_2 \cup Y_1/X_2 \cup Y_1/Y_2} \end{aligned} \tag{14}$$

Het feit dat deze definitie stukken ingewikkelder is, heeft ermee te maken dat de deling geen gesloten operatie is in $\mathbb{R}$. Indien de noemer een 0 bevat, treden er uitzonderlijke situaties op, die in deze definitie opgevangen moeten worden.

De notatie $\hat{A}$ staat voor de '$\mathbb{IR}$ sluiting' van A, m.a.w. het kleinste (beperkt) reëel interval dat A omvat.

4.3 Vierkantswortel

Zij $X_1 \sqcup Y_1, X_2 \sqcup Y_2 \in \mathbb{SR}$. We definiëren $\circledcirc \doteqdot \phi(\sqrt{\ })$ als volgt :

$$\circledcirc(X \sqcup Y) = \sqrt{X} \cap \mathbb{R} \sqcup \overline{(\sqrt{X} \setminus \mathbb{R}) \cup \sqrt{Y}} \tag{15}$$

4.4 Relationele operatoren

In theorie zouden we voor de relationele operatoren eveneens kunnen terugvallen op de uitdrukkingen (11) en (12). Maar in praktijk zijn de gebruikers van een software library gewend om als terugkeerwaarde van een relationele operator een boolean te krijgen (i.e. **true** of **false**).

Daarom zullen we in praktijk, als f een relationele operator is, voor supervallen de functie $\breve{f}$ gebruiken (i.p.v. $\dot{f}$), die we als volgt definiëren. Zij $X_1 \sqcup Y_1, X_2 \sqcup Y_2 \in \mathbb{SR}$.

$$\begin{aligned} &\breve{f}(X_1 \sqcup Y_1, X_2 \sqcup Y_2) = \mathbf{true} \\ &\qquad \iff \forall a \in X_1 \cup Y_1, \forall b \in X_2 \cup Y_2 : f(a,b) = \mathbf{true} \\ &\breve{f}(X_1 \sqcup Y_1, X_2 \sqcup Y_2) = \mathbf{false} \\ &\qquad \iff \exists a \in X_1 \cup Y_1, \exists b \in X_2 \cup Y_2 : f(a,b) = \mathbf{false} \end{aligned} \tag{16}$$

Als we deze definitie gebruiken, zijn relationele operatoren uniek en ondubbelzinnig bepaald. We zullen voor een aantal relationele operatoren een equivalente uitdrukking formuleren, waarvan de juistheid eenvoudig verifieerbaar is a.d.h.v. uitdrukking (16).

4.4.1 Gelijkheid

$$X_1 \sqcup Y_1 \stackrel{\smile}{=} X_2 \sqcup Y_2 \iff \begin{cases} X_1 \cup X_2 = \emptyset \text{ of } Y_1 \cup Y_2 = \emptyset \text{ of} \\ \exists a \in \mathbb{U} \setminus \{\mathrm{nan}\} : \\ \qquad X_1 \cup Y_1 = X_2 \cup Y_2 = \{a\} \end{cases} \tag{17}$$

4.4.2 Kleiner dan

$$X_1 \sqcup Y_1 \stackrel{\smile}{<} X_2 \sqcup Y_2 \iff \begin{cases} \sup(X_1) < \inf(X_2) \\ \forall y \in Y_2 : \sup(X_1) < y \\ \forall y \in Y_1 : y < \inf(X_2) \\ \forall y_1 \in Y_1, y_2 \in y_2 : y_1 < y_2 \end{cases} \tag{18}$$

Hieruit kunnen we volgende eigenschap afleiden :

$$X_1 \sqcup Y_1 \stackrel{\smile}{<} X_2 \sqcup Y_2 \iff \begin{cases} \underline{\sup(X_1)} < \inf(X_2) \\ \sup(X_1) \stackrel{\smile}{<} Y_2 \\ Y_1 \stackrel{\smile}{<} \overline{\inf(X_2)} \\ Y_1 \stackrel{\smile}{<} Y_2 \end{cases} \tag{19}$$

4.4.3 Ongelijkheid

Het zou mooi zijn als we de $\breve{\not\models}$ operator (volgens (16)) als volgt mochten definiëren :

$$X_1 \sqcup Y_1 \breve{\not\models} X_2 \sqcup Y_2 \iff (X_1 \cup Y_1) \cap (X_2 \cup Y_2) \neq \emptyset \tag{20}$$

Helaas zal dan $\mathbb{U} \neq \mathbb{U}$ niet meer als **true** geëvalueerd worden, in tegenstelling met wat de IEEE 754 standaard voorschrijft... De vraag is dan natuurlijk wat het belangrijkste is : een mooi sluitend systeem, of de Standaard, die in feite enkel rekening houdt met floating-point getallen.

Persoonlijk vind ik het niet zo erg dat $\mathbb{U} \breve{\not\models} \mathbb{U}$ als **false** geëvalueerd wordt, aangezien de uitdrukking $\neg(\mathbb{U} \stackrel{\smile}{=} \mathbb{U})$ wel **true** zal blijven. Merk op dat de tweede uitdrukking 'samengesteld' is uit $\stackrel{\smile}{=}$ en $\neg$, terwijl de eerste daarentegen 'atomisch' is.

4.5 Supervallen versus Extended Real Interval System

'Under construction'. Ik zal Walster nog eens grondig moeten doorlezen, want er zijn wel heel wat verschillen, maar ik vind zijn tekst niet bijzonder overzichtelijk. Eigenlijk bespreekt hij drie verschillende instanties van het 'Extended Real Interval System', en daarin zijn - naar mijn bescheiden mening - wel enkele inconsistenties terug te vinden. Dit is dus iets voor binnenkort.

Referenties

[1] Johan Vervloet. `specialvalue` of rekenen met verzamelingen. http://win-www.uia.ac.be/u/jvvloet/hybex/special_doc.tex, July 2000.

[2] G. William Walster. The Extended Real Interval System. http://www.mscs.mu.edu/~georgec/Classes/GlobSol/Papers/extended_intervals.ps, April 1998.